ECOLE DE L'AIR 1982

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES T - TA

PROBLEME 1

E est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, sur le corps des réels.

On sait qu'en choisissant deux des trois opérations : addition interne, multiplication interne, multiplication externe par un réel, on définit sur E soit une structure d'espace vectoriel, soit une structure d'anneau. D'où : l'espace vectoriel E, ou l'anneau E.

E_1 est le sous-ensemble de E, formé des matrices de la forme :

$$M(a,b,c) = \begin{bmatrix} b+c & b-a \\ a-b & a+c \end{bmatrix}$$

a, b, c étant 3 réels quelconques.

1°) Soient E'_1 , E'_2 , E'_3 , les trois sous-ensembles de E_1

$$E'_1 = \left\{ M(a,0,0) \quad / \; a \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad a \neq 0 \right\}$$

$$E'_2 = \left\{ M(0,b,0) \quad / \; b \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad b \neq 0 \right\}$$

$$E'_3 = \left\{ M(0,0,c) \quad / \; c \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad c \neq 0 \right\}$$

Soit E' leur réunion : $E' = E'_1 \cup E'_2 \cup E'_3$

Montrer que la multiplication des matrices confère à E' une structure de groupe commutatif.

On posera :

$$U = M(1,0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad V = M(0,1,0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I = M(0,0,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2°) Montrer - rapidement - qu'on peut définir sur E_1 une structure d'anneau, sous-anneau de l'anneau E.

3°) Montrer qu'on peut définir sur E_1 une structure d'espace vectoriel, sous-espace de l'espace E.

Montrer que cet espace est de dimension 2, et en donner une base.

4°) Chercher les matrices de l'anneau E_1 inversibles dans E_1 .

(pour cette question, on aura intérêt à faire un changement de notations amenant l'ensemble E_1 à être une famille à 2 paramètres).

L'anneau E_1 est-il un corps ?

5°) Y-a-t-il dans E_1 des matrices diagonalisables ?

PROBLEME 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. m étant un réel quelconque, on définit dans ce plan une courbe (C_m) par sa représentation paramétrique :

$$M \in C_m \begin{cases} x = \cos^3\alpha + m \sin\alpha \\ y = \sin^3\alpha + m \cos\alpha \end{cases} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

1°) Montrer qu'on obtient toute la courbe C_m en construisant l'arc correspondant à $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right]$ puis en faisant 2 symétries successives.

2°) Montrer que deux courbes correspondant à deux valeurs opposées de m se déduisent l'une de l'autre par une symétrie simple.

3°) Pour une courbe (C_m), calculer la pente de la tangente en un point M(α). En déduire une construction très simple de cette tangente.

4°) Calculer la longueur totale d'une courbe C_m (on sera amené à considérer plusieurs cas suivant la valeur de m).

5°) Construire la courbe C_1, correspondant à m = 1

(L'arc correspondant à $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ contient un point de rebroussement que l'on pourra déterminer à l'aide d'une calculatrice).

On prendra pour unité 10 cm.

6°) Toujours pour la courbe C_1 , et en se bornant à $(-\frac{\pi}{4} < \alpha < 0)$, trouver, de façon très simple le rayon de courbure et les coordonnées du centre de courbure.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail